Chapitre 25

Couples de variables aléatoires

I Couples de variables aléatoires

1) Généralités

a) Définition :

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
On appelle couple de variables aléatoires (réelles) toute application de la forme :

$$\begin{array}{rl} \Omega & \to \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

On note simplement (X, Y) ce couple, où X et Y sont donc des variables aléatoires réelles "classiques".
L'univers image du couple est $\{(X(\omega), Y(\omega)); \omega \in \Omega\}$.
Il est inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, l'ensemble des couples de résultats possibles formés à partir des résultats de X et de Y.

b) Exemple :

On lance 2 dés : un dé 6 faces et un dé 4 faces.
Soit X la variable modélisant le dé 6 faces et Y modélisant le dé 4 faces.
On peut modéliser le résultat du lancer des deux dés par un couple $Z = (X, Y)$. L'univers image est alors $Z(\Omega) = [\![1; 6]\!] \times [\![1; 4]\!]$.

c) Système complet d'événements associés à un couple de variables aléatoires

Proposition 1

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots\}$ (éventuellement infinis).
Alors la famille d'événements

$$((X = x_i) \cap (Y = y_j))_{\substack{1 \leq i \\ 1 \leq j}}$$

est système complet d'événements.
En particulier on a :

$$\sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 1$$

▷ *Preuve* : Même démonstration que pour les variables aléatoires "solo". ◁

2) Loi d'un couple de variables aléatoires / loi conjointe :

a) Définition

Le système complet d'événements défini précédemment permet d'introduire naturellement la loi d'un couple de variables aléatoires :

Définition 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On appelle loi du couple (ou loi conjointe) l'application :

$$\begin{array}{rl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to [0,1] \\ (x, y) & \mapsto P([X = x] \cap [Y = y]) \end{array}$$

Autrement dit, donner la loi d'un couple de variables aléatoires, c'est donner les probabilités d'obtention de tous les couples de résultats imaginables.
A noter qu'on peut donner des probabilités nulles : les couples de résultats ne sont pas forcément atteints.

Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut présenter la loi d'un couple de variables aléatoires sous la forme d'un tableau à double entrée. Ainsi, en notant $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$:

X \ Y	$\dots$	y_j	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$\dots$	$P(X = x_i \cap Y = y_j)$	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Notation : on utilise souvent la notation p_{ij} pour désigner $P(X = x_i \cap Y = y_j)$.

b) Exemples

i) On reprend l'exemple des deux dés.
Toutes les combinaisons sont equiprobables, et il y a 24 possibilités (6 possibilités pour X, 4 pour Y).
Ainsi, la loi du couple est donnée par :

$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1;6]\!] \times [\![1;4]\!],\ P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{24}.$$

Faire un tableau ici n'a pas vraiment d'intérêt... (toutes les cases sont égales)

ii) On lance 2 dés 4 faces de manière indépendante.
On note X le résultat du premier lancer, Y le second.
On pose $M = \max(X, Y)$ et on s'intéresse à la loi du couple (X, M).
La technique est exactement la même que pour les variables aléatoires classiques : on détermine l'univers image, et on décompose les événements pour pouvoir chercher la loi.

3) Lois marginales

a) Définition

Définition 3

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y sont les variables aléatoires marginales de Z, et les lois de X et de Y sont appelées les lois marginales.

Exemple :
Lancer de deux dés (un dé 6 faces, modélisé par X et un 4 faces modélisé par Y). Le couple est $Z = (X, Y)$.
Les lois marginales sont la loi de X et celle de Y.
Ici, on a $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$.

b) De la loi conjointe aux lois marginales

On reprend l'exemple du couple (X, M). Les variables marginales sont X et M.
Il est clair que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$ mais quelle est la loi de M ?
L'idée est d'utiliser la loi conjointe en utilisant le système complet d'événements associé à X. En effet, comme $(X = 1)$,$(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$ est un système complet, on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(M = k) = \sum_{i=1}^{4} P(M = k \cap X = i)$$

Ainsi, $P(M = k)$ est obtenu en faisant la somme de la k-ième colonne dans le tableau de la loi conjointe. De la même façon, la loi de X est retrouvée en faisant la somme sur les lignes. On complète alors le tableau :

X \ M	1	2	3	4	Loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	
Loi de M					

Les lois des variables marginales apparaissent donc en marge du tableau de la loi du couple, d'où l'adjectif "marginal"...
On peut généraliser ce raisonnement à toute variable discrète, éventuellement infinie, et on montre le théorème suivant :

Théorème 1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j; j \in J\}$, où I et J sont des sous ensemble de $\mathbb{N}$ (éventuellement infinis).
Les lois marginales sont données par :

$$\forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

(somme de la $i$ème ligne si on fait un tableau)

$$\forall j \in J, P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

(somme de la j-ème colonne si on fait un tableau)

▷ *Preuve* : On procède comme dans l'exemple en utilisant le sytème complet d'événements associé à Y pour déterminer la loi de X, et celui associé à X pour déterminer la loi de Y. ◁

c) Exercice / exemple :

Pendant une colle de maths, 3 questions de cours sont possibles : A, B ou C. Deux élèves passent leur colle et tout deux ne maîtrisent que la question A.
Le prof de maths a trois sujets, chacun avec une question de cours différente : A, B ou C.

Notons X la va modélisant le succès à la question de cours du premier élève ($X = 1$ si succès, 0 si échec) et Y celle modélisant le succès du second élève.

1. Donner la loi du couple et les lois marginales dans le cas où le sujet est remis dans l'ensemble des sujets après tirage.
2. Même question dans le cas où le sujet n'est pas remis après tirage (ce qui est la situation qui a lieu concrètement)

4) Indépendance

a) Rappel :

Définition 4

On dit que deux variables aléatoires sont indépendantes ssi :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

b) Lien avec la loi du couple :

La loi conjointe permet rapidement de voir si des variables sont indépendantes, puisque les cases donnent $P(X = x \cap Y = y)$: il suffit de vérifier que chaque case est le produit des valeurs en marge.

Exemple :

$X\backslash Y$	0	1	loi de X
0	4/9	2/9	2/3
1	2/9	1/9	1/3
Loi de Y	2/3	1/3	1

X et Y indépendants

et

$X\backslash Y$	0	1	loi de X
0	1/3	1/3	2/3
1	1/3	0	1/3
Loi de Y	2/3	1/3	1

X et Y non indépendants

c) Loi conditionnelle :

Définition 5

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires et $y \in Y(\Omega)$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ l'application

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto P_{Y=y}(X = x) \end{aligned}$$

Exemple d'utilisation :
On a vu en TD un exercice où N personnes passaient sous l'échafaudage d'un peintre, chacune ayant une probabilité p d'être tâchée par une goutte de peinture.
On avait supposé que $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
On a alors utilisé la loi de X sachant $(N = n)$ (une binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Si on connait ces lois conditionnelles, on a en fait naturellement la loi du couple via la formule des probabilité composée :

$$P(N = n \cap X = k) = P(N = n)P_{N=n}(X = k)$$

Dans l'exercice fait en TD, on en déduisait alors la loi de X, c'est à dire la loi marginale, en faisant une somme qui est en fait celle du théorème 1 de ce chapitre....

II Calcul avec des couples de variables

La connaissance de la loi du couple permet de calculer relativement facilement la loi de $g(X,Y)$ où g est une fonction de deux variables aléatoires.
Cette section traite de trois cas fréquents : la somme, le maximum et le minimum

1) Loi de la somme :

a) Aspect théorique :

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on connait la loi du couple (X,Y), et soit $S = X+Y$.
On se propose de déterminer la loi de S en utilisant la loi conjointe.
On "trie" les valeurs possibles de X et de Y en fonction de leur somme :
Soit $k \in S(\Omega)$: on pose $I_k = \{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega); x_i + y_j = k\}$.
Ainsi I_k est l'ensemble des indices i et j tel que $x_i + y_j$ donne k.
Autrement dit, $(S=k) = (X+Y=k) = \cup_{(i,j)\in I_k}(X = x_i \cap Y = y_j)$
Comme tous les éléments sont disjoints, il reste à prendre la probabilité de tout cela et faire la somme :

$$P(S=k) = \sum_{(i,j)\in I_k} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Si on connait la loi conjointe, on connait chacun des $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ et donc le calcul de la loi de somme est facile.

Cas particulier : variables à valeur entière

Propriété 1

Supposons que X et Y sont des variables aléatoires à valeur entières positives, et soit $S = X+Y$.
alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(S=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k-i)$$

Cette formule est appelée "produit de convolution" des lois de X et de Y.

b) Stabilité de la loi de Poisson :

Proposition 2

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda_1)$, et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.
Alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$

▷ *Preuve :*

◁

c) Stabilité de la loi binomiale :

Proposition 3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n_1, p)$, $\mathcal{B}(n_2, p)$, avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.
Alors $X_1 + X_2$ suit une loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

▷ *Preuve :*
On peut prouver ceci avec la définition de la loi binomiale, et en utilisant une formule appelée formule de Vandermonde (hors programme mais démontrable).

Cependant, le plus élégant (et rapide !) est de dire que X_1 compte le nombre de succès de n_1 expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès p, et X_2 compte de même le nombre de succès de n_2 expériences de Bernoulli indépendantes, avec la même probabilité de succès p.
Ainsi, $X_1 + X_2$ compte le nombre de succès de $n_1 + n_2$ expérience de Bernoulli, et comme X_1 et X_2 sont supposées indépendantes, ces $n_1 + n_2$ expériences sont indépendantes également.
D'où $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

◁

2) Loi du maximum et du minimum de deux variables

Méthode : *Loi du maximum*

Soient X et Y deux variables aléatoires
Pour déterminer la loi de $M = max(X, Y)$, on regarde, pour tout $k \in \mathbb{X}(\mathbb{Y}) \cup \mathbb{Y}(\omega)$, $P(M \leq k)$.
Comme dire que $M \leq k$ revient à dire que $X \leq k$ et $Y \leq k$, il vient

$$P(M \leq k) = P(X \leq k \cap Y \leq k)$$

On détermine alors $P(M = k)$ par différence.

Méthode : *Loi du minimum*

Soient X et Y deux variables aléatoires
Pour déterminer la loi de $Z = min(X, Y)$, on regarde, pour tout $k \in \mathbb{X}(\mathbb{Y}) \cup \mathbb{Y}(\omega)$, $P(Z \geq k)$.
Comme dire que $Z \geq k$ revient à dire que $X \geq k$ et $Y \geq k$, il vient

$$P(Z \geq k) = P(X \geq k \cap Y \geq k)$$

On détermine alors $P(Z = k)$ par différence.

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On prend deux nombres au hasard entre 1 et n, de manière indépendante. On note Z le maximum de ces deux nombres, et T le minimum
Déterminez la loi de Z et T.

III Espérance et couple de variables aléatoires

1) Théorème du transfert : version couple de v.a.

a) Enoncé

Théorème 2

Soit (X,Y) un couple de v.a. et soit g une fonction définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
Alors, si la série double $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X=x\cap Y=y)$ converge absolument, on a

$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X=x\cap Y=y)$$

C'est la même formule que pour le cas d'une seule variable, sauf qu'on utilise cette fois la loi du couple.

b) Exemple

On reprend l'exemple du couple (X,M) du début.
La loi conjointe est donnée par :

X \ M	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Plutôt que chercher la loi du produit XM (possible mais un peu long), on utilise le théorème du transfert , avec $g:(x,y)\mapsto xy$
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $X(\Omega)\times M(\Omega)$, et comme X et M sont des variables aléatoires finies, la série double est finie, donc convergente.
On a alors :

Le calcul serait évidemment plus délicat pour des variables infinies....

c) Exemple d'application : linéarité de l'espérance

On avait beaucoup souffert pour démontrer le résultat ci-dessous dans le chapitre sur les variables aléatoires. Le théorème de transfert permet maintenant de le démontrer :

Théorème 3 (*linearité de l'espérance*)

Soit X et Y deux variables aléatoires finies, et soit α et β deux réels. Alors

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

2) Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes

Proposition 4

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui admettent une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 1

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

▷ *Preuve :*

◁

Par récurrence, on montre facilement que :

Corollaire 2

Soient $X_1, X_2, \dots X_n$ n variables aléatoires indépendantes admettant une variance. Alors

$$V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

Et cela permet de montrer très vite que :

Proposition 5

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
Alors $V(X) = np(1-p)$